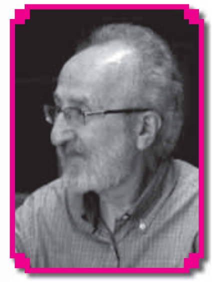
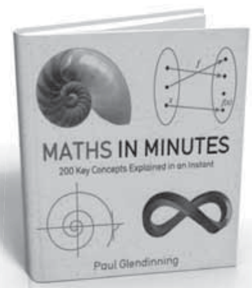
تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

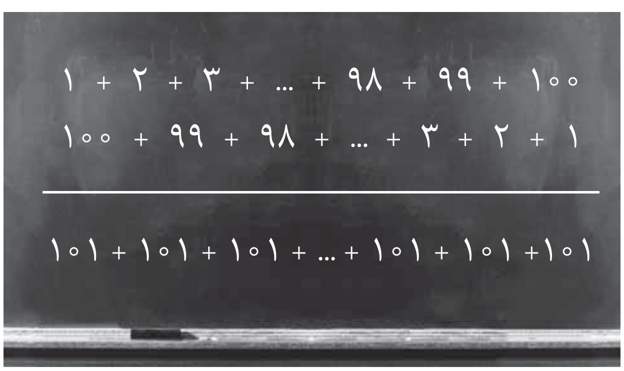
ریاضیات در چند دقیقه





تصاعد حسابی

تصاعد حسابی فهرستی مرتب از اعدادی است که تفاضل بین جمله‌های متوالی آن مقداری ثابت است. مثال آن ... ,۵۲ ,۳۹ ,۲۶ ,۱۳ ,۰ است که در آن تفاضل مشترک ثابت عدد ۱۳ است. اگر این تفاضل مشترک مثبت باشـد، دنباله‌ای مانند این مثال، به بی‌نهایت میل می‌کند، و اگر منفی باشـد، دنباله به بی‌نهایت منفی نزدیک می‌شـود. قضیهٔ **گرین ــ تائو** (Green-Tao) که اخیراً به اثبات رسـیده است، رواج تصاعدهای حسابی طولانی اعداد اول را توصیف می‌کند.



محاسـبهٔ مجموع‌هـای جزئـی تصاعد حسـابی، با به‌کاربردن کلک کوچکی، نسـبتاً ساده است. به‌عنوان نمونه، مجموع ۱ تا ۱۰۰ چقدر است؟ طریـق سـادهٔ انجام ایـن کار، دو بار فهرسـت کردن این مجموع با یک‌بار به طرف جلو و یک‌بار به سمت عقب رفتن است، به‌طوری که ستون‌هایی تشـکیل دهیم که مجموعشان ۱۰۱ می‌شود. از آنجا که ۱۰۰ عدد از این مجموع‌ها داریم، کل مجموع می‌شود ۱۰۰ ضرب در ۱۰۱، تقسیم بر ۲. در حالت عمومی این استدلال نشان می‌دهد که مجموع هر تصاعد حسابی با فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$a + ۲a + ۳a + \dots + na = \frac{۱}{۲}an(n + ۱)$$

تصاعد هندسی

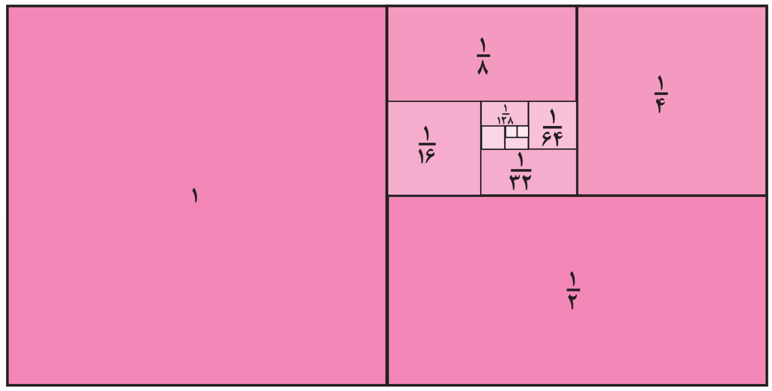
تصاعدهندسی(geometric progression) فهرست مرتبی از اعدادی است که در آن هر جملهٔ متوالی حاصل‌ضرب جملهٔ پیشین و عددی ثابت است. مثال آن ۱, ۴, ۱۶, ۶۴, ۲۵۶,... است که در آن، عامل ضرب ثابت مزبور، یعنی عدد ۴، به‌عنوان نسبت مشترک r مشهور است.

مجموع جزئی یک تصاعد هندسی عبارت است از:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^n$$

اگر ضریب r بزرگ‌تر از ۱ باشد، آن‌گاه این مجموع به سمت به‌علاوه یا منهای بی‌نهایت واگرا می‌شود. اما اگر ضریب r کوچک‌تر از ۱ باشد، در این صورت سری حدی، موسوم به «سری هندسی» (geometric sery)، به حد $S=\frac{a}{(1-r)}$ میل می‌کند.

تصاعدهای هندسی در بسیاری از مسائل ریاضی روی می‌دهند، و در بررسی ربح مرکب و قیمت در حسابداری نقش اساسی دارند. بسیاری از ریاضی‌دانان استدلال می‌کنند که «پارادوکس زنون» (Zeno's paradox) را حل کرده‌اند. زیرا مجموع‌های فاصلهٔ طی شده و زمان گرفته شده توسط خرگوش، تصاعدهای هندسی هستند که به مجموع فاصلهٔ مسیر مسابقه می‌انجامند.



► در نمودار مقابل، سطوح مستطیل‌ها یک تصاعد هندسی را با نسبت مشترک ۱/۲ نمایش می‌دهد. نمودار به روشنی نشان می‌دهد که سری نامتناهی به مقدار ۲ هم‌گرا می‌شود.

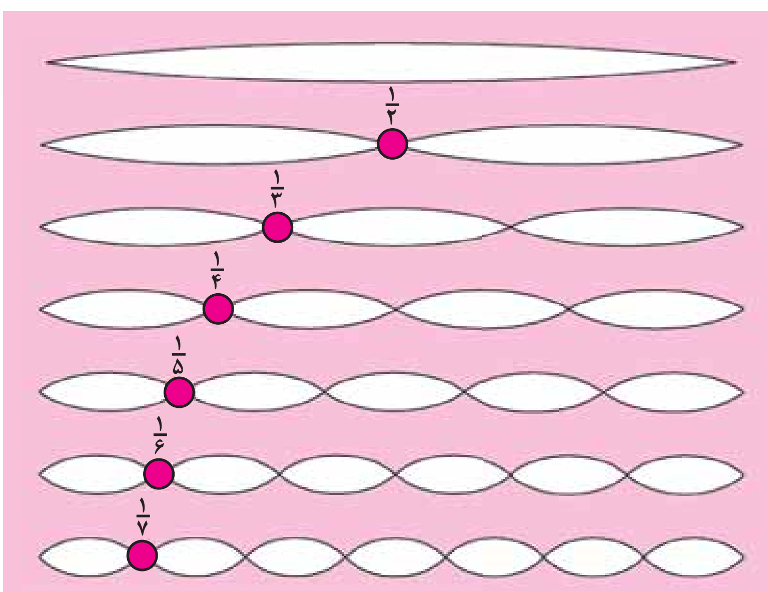
سری هم‌ساز

«سری هم‌ساز» (harmonic sery) مجموع دنباله‌ای نامتناهی از کسرهای به‌طور یکنواخت کاهش‌یابنده است. این سری که در نظریهٔ موسیقی دارای اهمیت است، به این صورت تعریف می‌شود: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$، و جملات اولیهٔ آن عبارت‌اند از:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$$

یکی از جنبه‌های شگفت‌آمیز سری هم‌ساز این است که گرچه تفاضل‌های متوالی بین جملات آن به صفر تقلیل می‌یابد، بدون حد رشد می‌کند.

یک راه شناخت این رفتار واگرای مورد بحث، گردآوری پهلوی همِ جمله‌های آن در گروه‌های کوچک‌تر است. این کار آشکار می‌کند که همواره ممکن است گروهی از جمله‌های متوالیاً کوچک‌تر تشکیل دهیم که با هم به عددی بزرگ‌تر از یک دوم بینجامند. به‌عنوان نمونه $(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$ بزرگ‌تر از یک دوم است؛ همین‌طور که $(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})$ چنین است.



▲ سری هم‌ساز از این نظر در موسیقی دارای اهمیت است که مقام‌های ارتعاش گوناگون مربوط به یک سیم کشیده شده یا ضربه خورده‌ای، که از دو طرف ثابت شده است، را به‌دست می‌دهد.